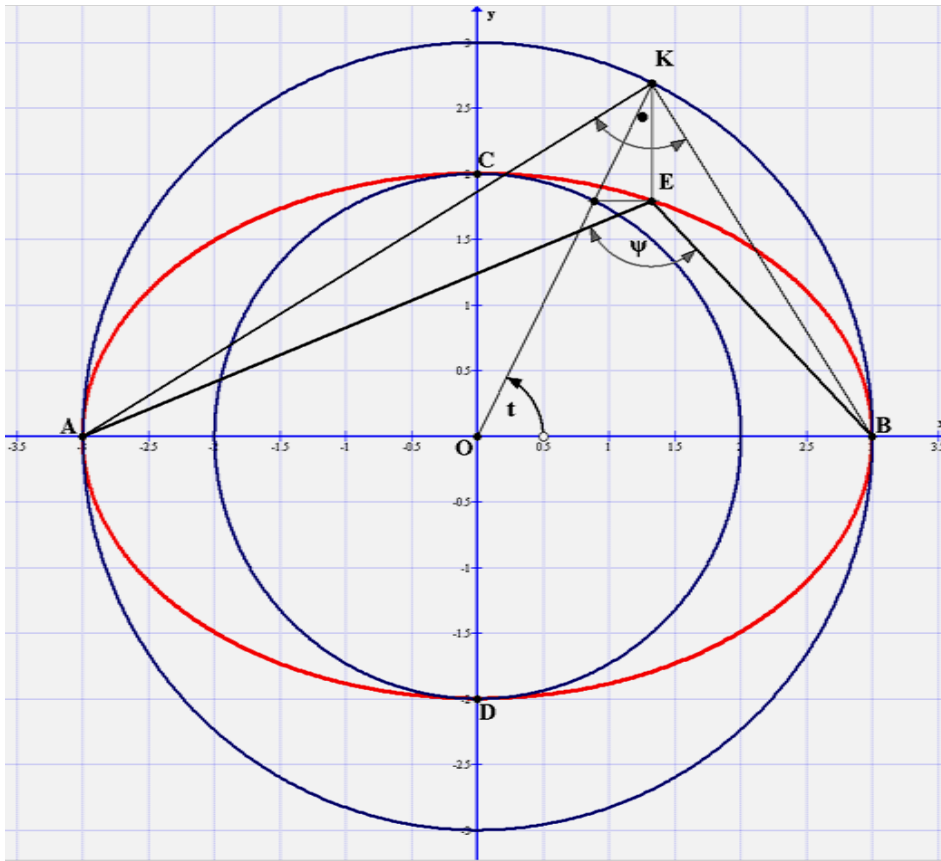


Hogyan torzul a derékszög, ha a Thalész - kör ellipszisbe megy át?

Meglepő, de erre eddig még nem gondoltunk. Itt az idő a címben feltett kérdés megválaszolására. Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Itt feltüntettük a hozzávalókat, valamint a keresett ψ szöget. Ennek számításos meghatározását koszinusztétellel végezzük. Eszerint:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{EB} \cdot \cos \psi . \quad (1)$$

A t szögváltozóval adott $E(x, y)$ ellipszispontra:

$$x(t) = a \cdot \cos t , \quad y(t) = b \cdot \sin t . \quad (2)$$

Most az 1. ábra szerint:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2 \cdot a , \\ \overline{AE} &= \sqrt{[a \cdot (1 + \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2} , \\ \overline{EB} &= \sqrt{[a \cdot (1 - \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2} . \end{aligned} \quad (3)$$

Majd (1) és (3) - mal:

$$\begin{aligned}
4 \cdot a^2 &= [a \cdot (1 + \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2 + [a \cdot (1 - \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{EB} \cdot \cos \psi = \\
&= a^2 \cdot [(1 + \cos t)^2 + (1 - \cos t)^2] + 2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t - \\
&\quad - 2 \cdot \sqrt{[a \cdot (1 + \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2} \cdot \sqrt{[a \cdot (1 - \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2} \cdot \cos \psi ; \text{ rendezve:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &\equiv a^2 \cdot [(1 + \cos t)^2 + (1 - \cos t)^2] + 2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t - 4 \cdot a^2 = \\
&= 2 \cdot \sqrt{[a \cdot (1 + \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2} \cdot \sqrt{[a \cdot (1 - \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2} \cdot \cos \psi \equiv J ; \quad (4)
\end{aligned}$$

Most (4) bal oldala kifejtve:

$$\begin{aligned}
B &= a^2 \cdot [(1 + \cos t)^2 + (1 - \cos t)^2] + 2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t - 4 \cdot a^2 = \\
&= a^2 \cdot (1 + 2 \cdot \cos t + \cos^2 t + 1 - 2 \cdot \cos t + \cos^2 t - 4) + 2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t = \\
&= a^2 \cdot (2 + 2 \cdot \cos^2 t - 4) + 2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t = a^2 \cdot (2 \cdot \cos^2 t - 2) + 2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t = \\
&= -2 \cdot a^2 \cdot (1 - \cos^2 t) + 2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t = -2 \cdot a^2 \cdot \sin^2 t + 2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t = -2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot \sin^2 t ,
\end{aligned}$$

tehát:

$$B = -2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot \sin^2 t . \quad (5)$$

Majd (4) jobb oldala kifejtve:

$$\begin{aligned}
J &= 2 \cdot \sqrt{[a \cdot (1 + \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2} \cdot \sqrt{[a \cdot (1 - \cos t)]^2 + (b \cdot \sin t)^2} \cdot \cos \psi = \\
&= 2 \cdot \sqrt{a^4 \cdot (1 - \cos^2 t)^2 + a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - \cos t)^2 \cdot \sin^2 t + a^2 \cdot b^2 \cdot (1 + \cos^2 t)^2 \cdot \sin^2 t + b^4 \cdot \sin^4 t} \cdot \cos \psi = \\
&= 2 \cdot \sqrt{(a^4 + b^4) \cdot \sin^4 t + a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t \cdot [(1 - \cos t)^2 + (1 + \cos^2 t)^2]} \cdot \cos \psi = \\
&= 2 \cdot \sqrt{(a^4 + b^4) \cdot \sin^4 t + a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t \cdot [1 - 2 \cdot \cos t + \cos^2 t + 1 + 2 \cdot \cos t + \cos^2 t]} \cdot \cos \psi = \\
&= 2 \cdot \sqrt{(a^4 + b^4) \cdot \sin^4 t + a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t \cdot 2 \cdot (1 + \cos^2 t)} \cdot \cos \psi = \\
&= 2 \cdot \sqrt{(a^4 + b^4) \cdot \sin^4 t + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t \cdot (2 - \sin^2 t)} \cdot \cos \psi = \\
&= 2 \cdot \sqrt{(a^4 + b^4) \cdot \sin^4 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^4 t} \cdot \cos \psi = \\
&= 2 \cdot \sqrt{(a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4) \cdot \sin^4 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t} \cdot \cos \psi = \\
&= 2 \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^4 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t} \cdot \cos \psi = 2 \cdot \sqrt{\sin^2 t \cdot [(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2]} \cdot \cos \psi = \\
&= 2 \cdot |\sin t| \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2} \cdot \cos \psi ,
\end{aligned}$$

tehát:

$$J = 2 \cdot |\sin t| \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2} \cdot \cos \psi . \quad (6)$$

Ezután (4), (5) és (6) - tal:

$$-2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot \sin^2 t = 2 \cdot |\sin t| \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2} \cdot \cos \psi , \text{ innen:}$$

$$\begin{aligned}
\cos \psi &= \frac{-2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot \sin^2 t}{2 \cdot |\sin t| \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2}} = - \frac{(a^2 - b^2) \cdot \sin^2 t}{|\sin t| \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2}} = \\
&= - \frac{\sin t}{|\sin t|} \cdot \frac{(a^2 - b^2) \cdot \sin t}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2}} = -\text{sgn}(\sin t) \cdot \frac{(a^2 - b^2) \cdot \sin t}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2}} , \text{ tehát:}
\end{aligned}$$

$$\cos \psi = -\text{sgn}(\sin t) \cdot \frac{(a^2 - b^2) \cdot \sin t}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2}} , \quad (7)$$

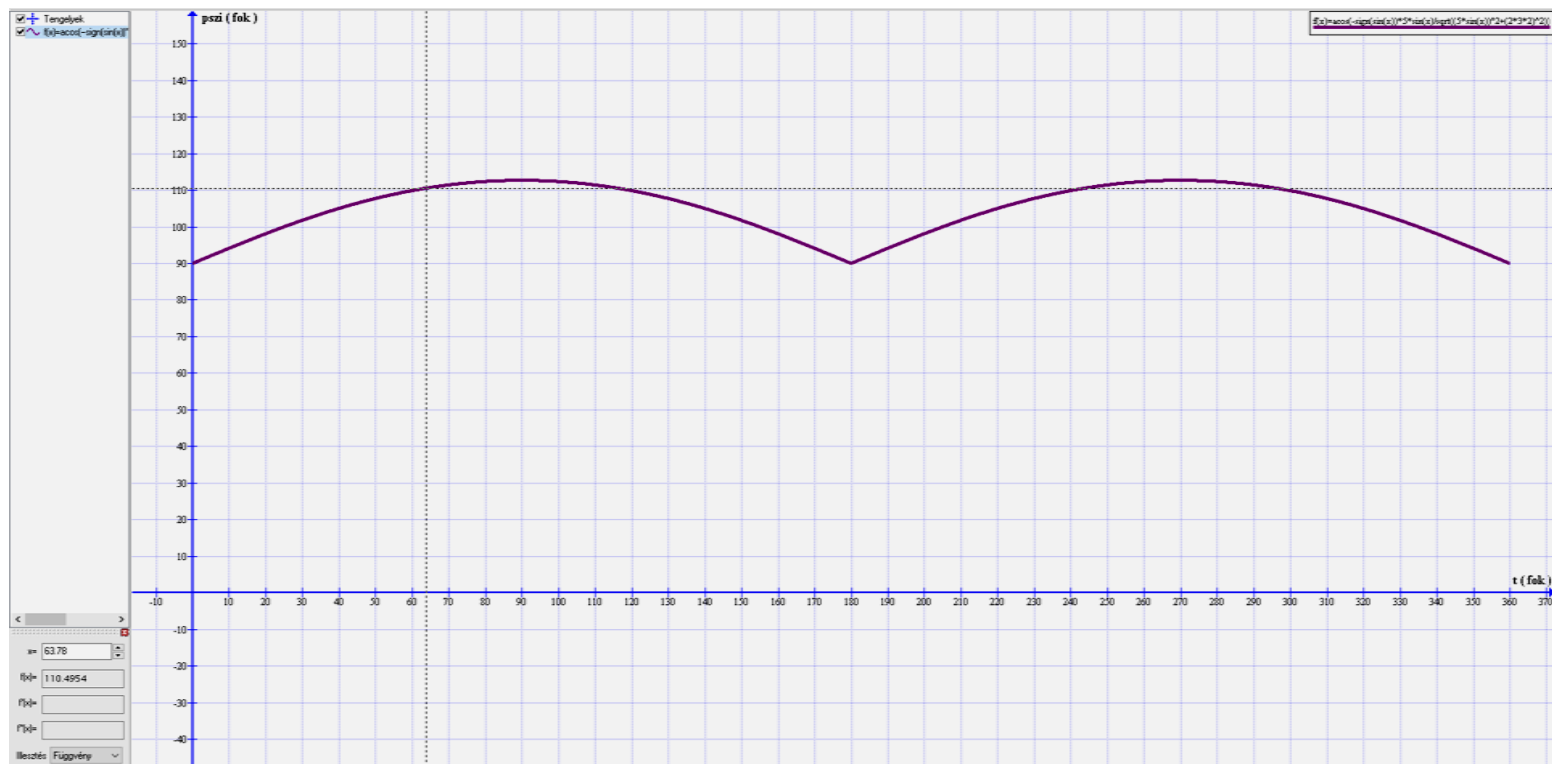
innen:

$$\psi(t) = \arccos \left[-\operatorname{sgn}(\sin t) \cdot \frac{(a^2 - b^2) \cdot \sin t}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot a^2 \cdot b^2}} \right], \quad 0^\circ \leq t \leq 360^\circ. \quad (8)$$

Adatok az ábrázoláshoz – v. ö.: 1. ábra! – :

$$a = 3 \text{ cm}; b = 2 \text{ cm}. \quad (A)$$

A (8) és (A) szerinti grafikont a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Innen leolvasható, hogy az AEB szög akkor a legnagyobb – vagyis akkor a legnagyobb a derékszög torzulása –, ha $E = C$, illetve $E = D$.

Továbbá az 1. ábra esetére: $t = 1,1132 \text{ rad} = 63,78^\circ \rightarrow \psi = 110,5^\circ$, egyezésben az 1. ábráról lemérhető értékkel.

Megjegyzések:

M1. Természetesen a szemlélet alapján is tudunk valamit mondani a keresett szögről, de az inkább csak hozzávetőleges leírás lehet.

M2. A (7) és (8) képletekből rögtön kiolvashatók az alábbiak:

$\sim a = b$ esetén $\psi = 90^\circ$, t - től függetlenül;

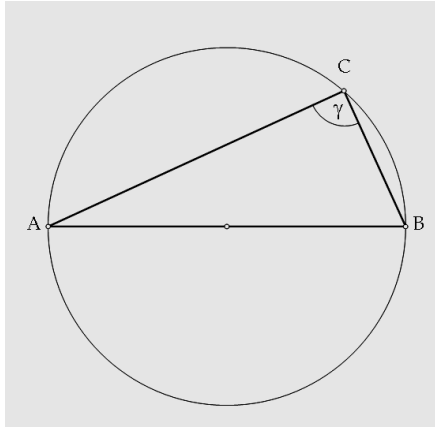
$\sim a > b$ esetén $\psi > 90^\circ$, kivéve a nagytengely végpontjait, ahol $t = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$;

$\sim a < b$ esetén $\psi < 90^\circ$, kivéve a „nagytengely” végpontjait;

Látjuk, hogy az itteni **A** és **B** pontokban a keresett szög *gyakorlatilag mindig derékszög*.

Ezt azért emeljük ki, mert időnként az olvasható, hogy – [1] – :

Ha vesszük egy O középpontú kör AB átmérőjét, valamint a körvonal egy tetszőleges (A-tól illetve B-től különböző) C pontját, akkor az ABC háromszög C csúcsánál lévő γ szöge derékszög lesz.



3. ábra – forrása: [1]

Úgy néz ki, a körátmérő **A** és **B** végpontjait kizárják, azaz a tételt ezekre a pontokra nem tartják érvényesnek. Ha ez a helyzet körnél, akkor ugyanez lesz a helyzet ellipszishoz is. Igaz, az **ABC** háromszög *elfajul*, de a derékszög megmarad. *Határesetben* a derékszöget az átmérő és az átmérővégi érintő egy végtelenül kicsiny darabja zárja be. Ezt gondolja e sorok írója. A hivatásos hozzáértők szerint azonban az a helyzet, hogy a 3. ábra **AB** szakaszának végpontjai nem tartoznak a látóörívekhez – ld. pl.: [2], [3], [4]! Erről [4] egyebek mellett azt írja, hogy:

„...a két végpont nem tartozik a mértani helyhez, hiszen nem is lehet szó arról, hogy a szakasz mekkora szögben látható a végpontjaiból.” Hmm...

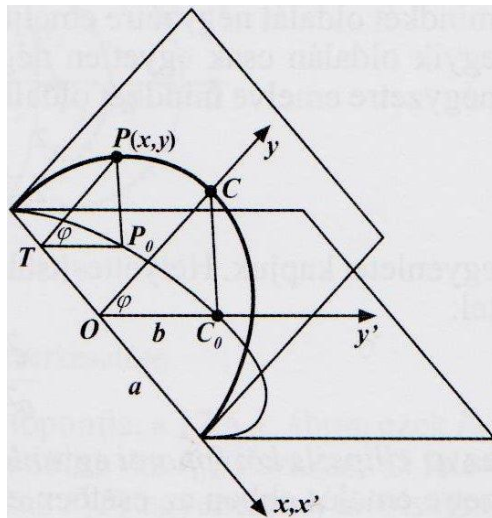
M3. A Thalész - tétel 90° - os látószöggel kapcsolatos. Érdekes lehet, ezért javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó vizsgálja meg ettől eltérő látószögű látókör esetére is a szögtorzulást, ha a látókör ellipszissé torzul.

M4. Találtunk (8) - nál egyszerűbb alakú összefüggést is, tg - , illetve $arctg$ - függvény - nyel. Ezzel azonban nem tudja egyszerre megrajzolni a **Graph** a 2. ábra szerinti görbét, a másféle függvény szakadásos volta, illetve többértékűsége miatt. Itt külön beavatkozásra lenne szükség, ezért ennek alkalmazásáról leteztünk. Eszerint a hosszadalmas számítással járó megoldásunk jó / jobb választásnak bizonyult.

M5. (Csak zárójelben:) Ilyen műhelytitkokat azért árulunk el, mert a kezdő sokszor nem tudja, miért akadt el. Mi már ezt sokszor lejátszottuk, így megszívlelendő tapasztalatként továbbadhatjuk. Egy hasonló dolog: hogyan kerül a csizma az asztalra, vagyis mi szükség van e számításra, illetve e látszólag érdektelen témával való foglalkozásra? Erre az a válaszuk, hogy egyszer csak kiderülhet, hogy egy ilyen levegőben lógónak tűnő feladat megoldása közelebb vitt egy később fontossá válható probléma megoldásához. Ezzel kapcsolatban érdemes lehet emlékeztetni arra a tényre, hogy az alkotási folyamat jórészt nem tudatos. Mire felbukkan egy ötlet, addigra már a háttérben sok minden történt, tudattalanul. Aki nem hiszi, járjon utána! Mi – úgy véljük – ezt már megtettük, és éppen ennek eredményeiről számolunk be itt. Némi szerénytelenséggel azt is mondhatjuk, hogy munkásságunk honlapunkon is megtalálható eredményei jórészt pontosan ilyen – „biztosan jó lesz egyszer valamire” – típusú munkák során álltak elő.

Kedves Olvasó, értsd jól / ne félre az ittenieket!

M6. Akár jogosnak is tűnhet e feladat kapcsán a „mondvacsínált” jelző. Ezt feloldandó máris mutatjuk a feladatbeli geometriai helyzet fizikai realizálását – 4. ábra.



4. ábra – forrása: [3]

Egy kartonpapírra rajzoljunk egy r sugarú kört, majd vágjuk azt ki!

Ezután rajzoljuk rá a Thalész - tételnek megfelelő derékszögű háromszöget, a 3. ábra szerint! A körlapot a háromszög átfogója – a kör átmérője – körül forgassuk el φ szöggel, a 4. ábra szerint, majd vetítsük az elforgatott kört az eredeti körsíkra, merőlegesen! Ha ez pl. megvilágítással történik, akkor a körlap árnyékaként jelenik meg a kör ellipszisvetülete. Ezen ellipszis paramétereire fennáll, hogy:

$$a = r, \quad b = r \cdot \cos \varphi, \quad (9)$$

amint ez a 4. ábráról közvetlenül leolvasható.

A képleteinkhez, (9) - cel is:

$$a^2 - b^2 = r^2 - r^2 \cdot \cos^2 \varphi = r^2 \cdot (1 - \cos^2 \varphi) = r^2 \cdot \sin^2 \varphi, \text{ tehát:}$$

$$a^2 - b^2 = r^2 \cdot \sin^2 \varphi \quad (10)$$

Most (7) és (10) - zel:

$$\cos \psi = -\operatorname{sgn}(\sin t) \cdot \frac{r^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \sin t}{\sqrt{(r^2 \cdot \sin^2 \varphi)^2 \cdot \sin^2 t + 4 \cdot r^2 \cdot (r \cdot \cos \varphi)^2}},$$

majd ebből kiemeléssel és egyszerűsítéssel:

$$\cos \psi = -\operatorname{sgn}(\sin t) \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cdot \sin t}{\sqrt{\sin^4 \varphi \cdot \sin^2 t + 4 \cdot \cos^2 \varphi}}. \quad (11)$$

Innen leolvasható, hogy a ψ szög akkor derékszög, ha $\cos \psi = 0$, ami pedig akkor következik be, ha

$$\sim \sin \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ;$$

$$\sim \sin t = 0 \rightarrow t = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ.$$

Ezután (11) - ből:

$$\boxed{\psi(\varphi, t) = \arccos \left[-\operatorname{sgn}(\sin t) \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cdot \sin t}{\sqrt{\sin^4 \varphi \cdot \sin^2 t + 4 \cdot \cos^2 \varphi}} \right]}, \quad 0^\circ \leq (\varphi, t) \leq 360^\circ. \quad (12)$$

Látjuk, hogy az eredetileg a valóságtól elrugaszkodottnak tűnő gondolatbeli játék immáron egy tényleges fizikai ~ geometriai problémává és annak megoldásává nemesült, ha tetszik.

Források:

[1] – <https://hu.wikipedia.org/wiki/Thal%C3%A9sz-t%C3%A9tel>

[2] – **Obádovics J. Gyula**: Matematika
15. kiadás, Scolar Kiadó, Budapest, 1998.

[3] – **Reiman István**: Matematika
Typotex Kiadó, Budapest, 2011.

[4] – **Hajós György**: Bevezetés a geometriába
6. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***
ny. mérnöktanár

Szódliget, 2020. 01. 26.